2.3 功　动能定理

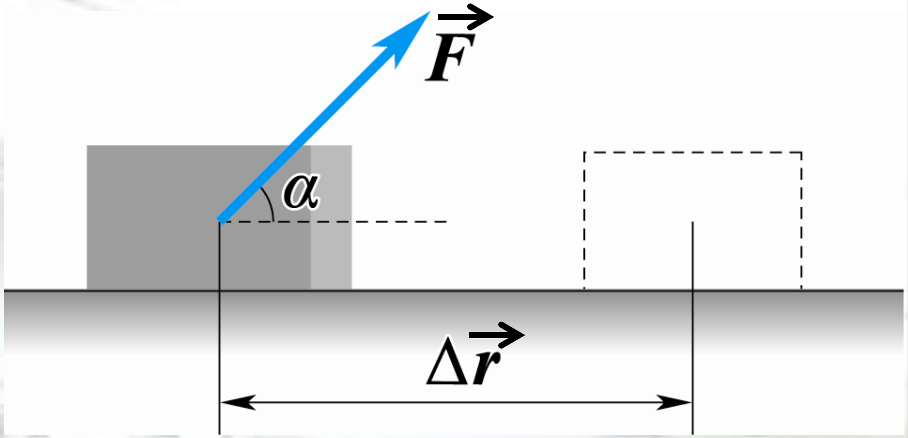
2.3.1　功　功率

一、功

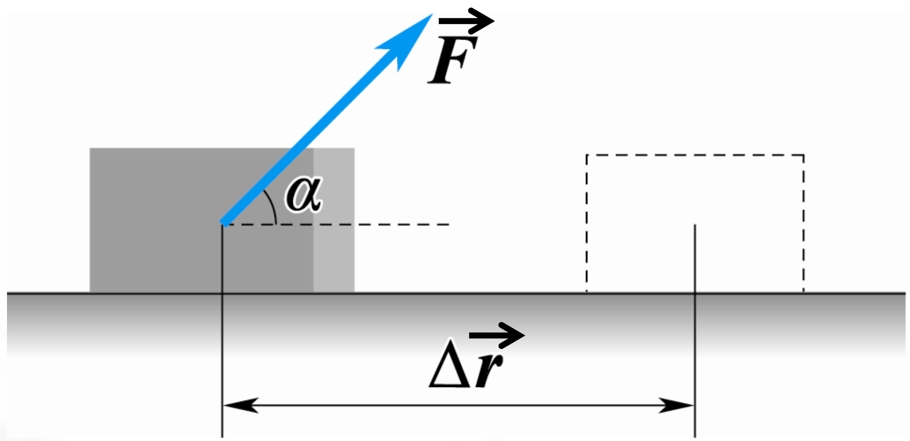
力对质点所做的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积。（功是标量，过程量。在国际制单位制中，功的单位是J（焦耳或焦））

（1）恒力的功

$$A = F\cos\alpha\,|\Delta\vec{r}|$$
$$= \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$



2.3.1 功　功率



$$A = F\cos\alpha\,|\Delta\vec{r}\,| = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

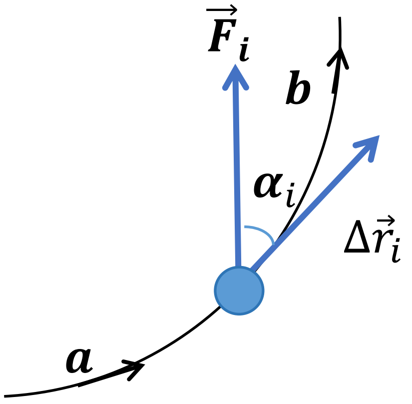
$$\begin{cases} 0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}, & A > 0,\ \text{外力对物体做正功} \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2}, & A = 0,\ \text{外力垂直物体位移方向，对物体不做功} \\ \dfrac{\pi}{2} < \alpha \le \pi, & A < 0,\ \text{外力对物体做负功} \end{cases}$$

上一页 下一页 返回目录

（2）变力的功

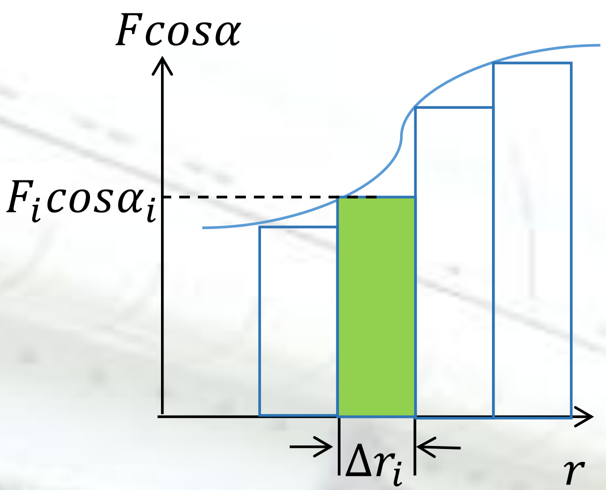
把运动轨迹分割为许多足够小的微元$\Delta\vec{r}_i$。在任一微元中，力$\vec{F}$可以看作恒力，则元功

$$\Delta A_i = F_i \cos\alpha_i \,|\Delta\vec{r}_i| = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$



点a到点b整个过程力$\vec{F}$所做的总功为

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i \,|\Delta\vec{r}_i| = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$



当$\Delta\vec{r}_i \to 0$时，

$$A = \lim_{\Delta\vec{r}_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

上一页 下一页 返回目录

2.3.1 功　功率

功在直角坐标系中的计算

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \\ d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \end{cases}$$

元功可写成

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

总功为

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

2.3.1 功　功率

多个力$\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_i$同时作用到质点，合力所做的功

$$
\begin{aligned}
A &= \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n)\cdot d\vec{r} \\
&= \int_a^b \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_a^b \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \cdots + \int_a^b \vec{F}_n \cdot d\vec{r} \\
&= A_1 + A_2 + \cdots + A_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_i
\end{aligned}
$$

合外力对质点所做的功，等于每个分力所作功的代数和

二、功率

力在单位时间内所做的功，或功随时间的变化率，称为功率，其定义式

$$P=\frac{dA}{dt}$$

将功的表达式代入得

$$P=\frac{dA}{dt}$$

$$=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

在国际制单位制中，功率的单位为W（瓦特或瓦）

2.3.1 功 功率

例 2.8 质量为2kg的物体在变力$\vec{F} = 12t\vec{i}$作用下，由静止出发沿x轴做直线运动，试求（1）前2s内变力所作的功；（2）第1s末和第2s末的功率

解：（1）

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F \cdot dx = \int_a^b 12t \cdot v dt$$

由牛顿第二定律得

$$a = \frac{F}{m} = \frac{12t}{2} = 6t$$

因此

$$dv = adt = 6tdt$$

两边积分得

$$\int_0^v dv = \int_0^v 6tdt \Rightarrow v = 3t^2$$

$$A = \int_0^2 12t \cdot 3t^2 dt = 144(J)$$

（2）

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv=36t^3$$

t=1s时

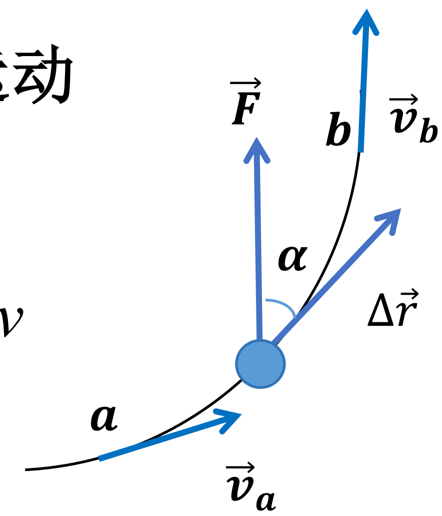
$$P=36W$$

t=2s时

$$P=288W$$

2.3.2 动能定理

质点在外力$\vec{F}$的作用下沿曲线从点a运动运动到点b，曲线上任一段$d\vec{r}$，$\vec{F}$所做的功为



$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cos\alpha\, dr = ma_t dr = m\frac{dv}{dt}dr = mvdv$$

$$A = \int_{v_a}^{v_b} mvdv = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

$$= E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k$$

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$称为物体的**动能**。动能是**标量**，**状态量**，表示物体由于运动所具有的能量。

合外力对质点所做的功等于质点动能的变化量，即质点的**动能定理**。

2.3.2 动能定理

应用动能定理解题步骤：

（1）明确研究对象；

（2）分析物体在过程中受到的全部力做功情况，并加以计算；

（3）列出始、末状态动能的表达式；

（4）运用动能定理列方程求解。

应用动能定理需要注意得问题：

（1）动能定理中的功是合外力的功。功是过程量，动能是状态量；只有动能发生变化时，才有功，功是能量变化的量度

（2）可以不考虑外力的变化，只需计算动能变化就能得出外力所做的功

（3）动能与参考系有关，动能定理只适用于惯性系

2.3.2 动能定理

例2.9 用铁锤打铁钉使其进入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉钉入木板的深度成正比，即$F=-kx$，铁钉第一次被击入板内的击入深度为2cm，求第二次的击入深度（设两次锤击给予铁钉的速度相同）

解：第一次击入深度为x时，阻力所作的功为

$$A=\int_0^x F\,dx=\int_0^x -kx\,dx=-\frac{kx^2}{2}$$

第二次锤击铁钉时，阻力所做的功为

$$A'=\int_2^x -kx\,dx=-\frac{kx^2}{2}+2k$$

因为两次锤击给予铁钉的速度相同，由动能定理得

$$A'=A=0-\tfrac{1}{2}mv^2$$

则

$$-\frac{kx^2}{2}+2k=-2k\Rightarrow x=2\sqrt{2}cm\Rightarrow\Delta x=(2\sqrt{2}-2)cm$$

例2.10 质量为m得物体在阻尼介质中做直线运动，阻尼力近似为速度的线性函数，即$F=mkv$，k为常数。物体以初速度v_0开始运动，计算最后静止时阻尼力所做的功，证明它正好等于物体损失的动能。

解：阻尼力所做的功为

$$A=\int_0^x -F dx=-\int_0^x mkv dx$$

由牛顿第二定律得

$$-mkv=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$dx=-\frac{dv}{k}$$

代入功

$$A=\int_{v_0}^0 mv dv=m\int_{v_0}^0 v dv=-\frac{1}{2}mv_0^2$$

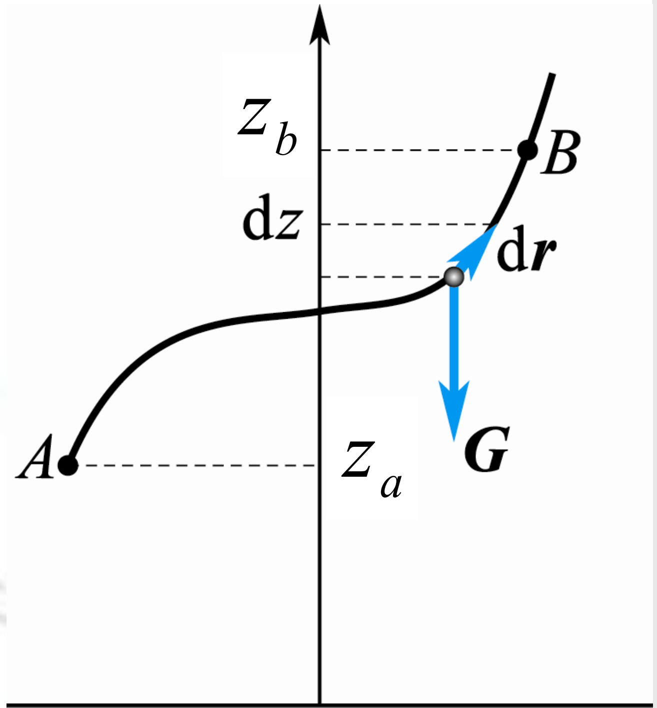
2.4 势能　机械能守恒定律

2.4.1　保守力的功　势能

一、保守力的功

（1）重力的功

质量为m的质点在重力$\vec{G}$作用下由A点沿任意路径移到B点。重力$\vec{G}$所做的功



$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

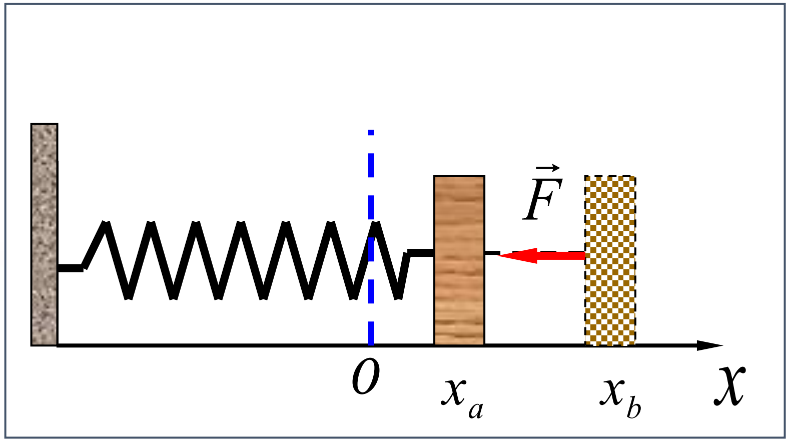
$$\vec{G} = G_x\vec{i} + G_y\vec{j} + G_z\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - mg\vec{k}$$

$$A = \int_{z_a}^{z_b} \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_{z_a}^{z_b} -mg\vec{k}\cdot dz\vec{k} = \int_{z_a}^{z_b} -mgdz = -mg(z_b - z_a)$$

重力做功与物体所经历的路程无关，只取决于物体的始末位置。

（2）弹性力的功

轻弹簧固定在左端，另一端连着质量为m的木块，弹簧自然伸长的位置为O点，弹簧对木块做的功。



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$A = \int_{x_a}^{x_b} \vec{F} \cdot dx\vec{i} = \int_{x_a}^{x_b} -kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

弹力做功与物体所经历的路程无关，只取决于物体的始末位置。

（3）万有引力的功

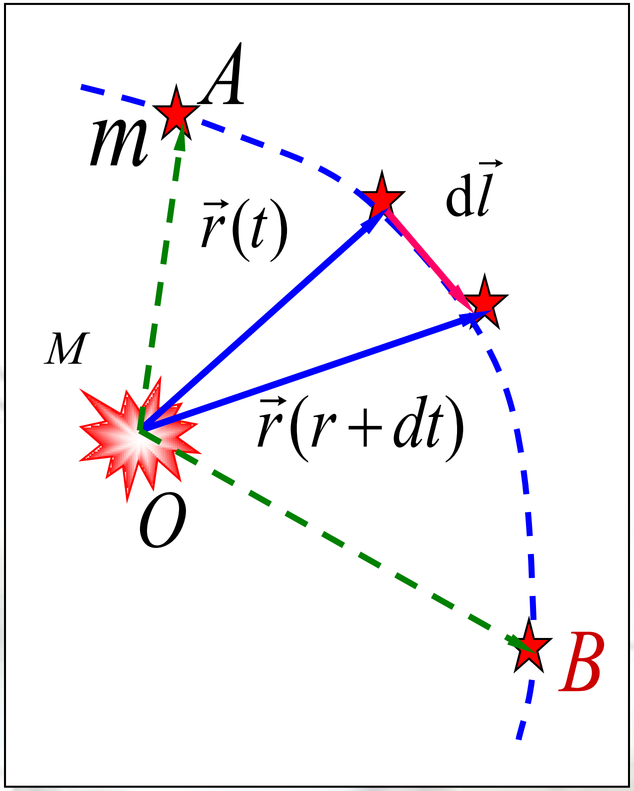
以为**M**参考系，**m**的位置矢量为$\vec{r}$，**M**对**m**的万有引力为

$$\vec{F}=-G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

M对**m**的万有引力所作的功

$$A=\int_{r_A}^{r_B}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_{r_A}^{r_B}-G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_{r_A}^{r_B}-G\frac{Mm}{r^2}dl\cos\theta$$



2.4.1 保守力的功　势能

$$dl\cos\theta = dr$$

$$A = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{l}$$

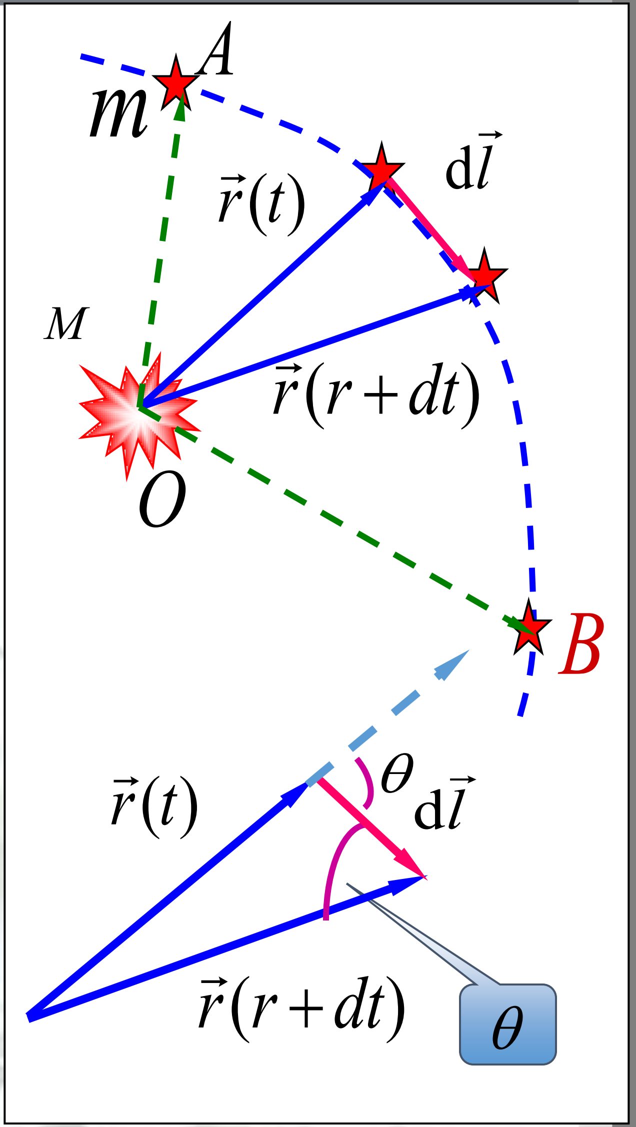
$$= \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{Mm}{r^2}dl\cos\theta$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$= -\left[\left(-G\frac{Mm}{r_B}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_A}\right)\right]$$

万有引力做功与物体所经历的路程无关，只取决于物体的始末位置。

对物体所做的功与物体所经历的路程无关，只取决于物体的始末位置，具有此特点的力称为保守力。

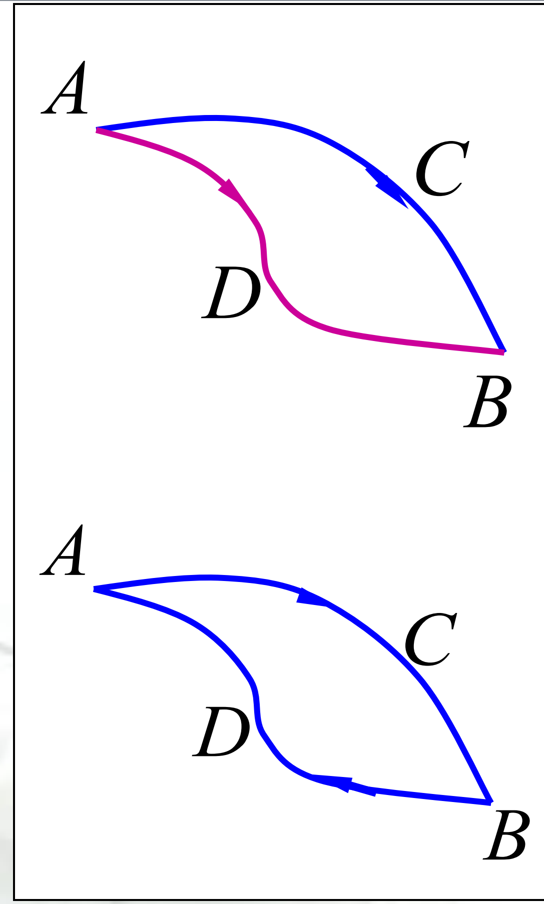


2.4.1　保守力的功　势能

$$\int_{ACB}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{ADB}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=-\int_{DBA}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\oint_{L}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\cancel{\int_{ACB}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}+\cancel{\int_{BDA}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

$$\oint_{L}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0$$



物体沿闭合路径运动一周时，保守力对它所作的功等于零

非保守力：力所作的功与路径有关，例如摩擦力

二、势能

保守力做工只与物体始末位置有关，引入相应的状态函数，称之为**势能E_p**。

重力功

$$A=-mg(z_b-z_a)$$

引力功

$$A=-\left(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

弹力功

$$A=-\left[\left(-G\frac{Mm}{r_B}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_A}\right)\right]$$

重力势能

$$E_{\mathrm{p}}=mgz$$

引力势能

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{Mm}{r}$$

弹性势能

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2$$

保守力做的工 $A=-(E_{p2}-E_{p1})=-\Delta E_p$

2.4.1 保守力的功　势能

讨论

- 势能是状态函数 $E_p = E_p(x, y, z)$
- 势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关，但势能差与零点选取无关，是绝对的
- 势能是属于系统的
- 势能计算

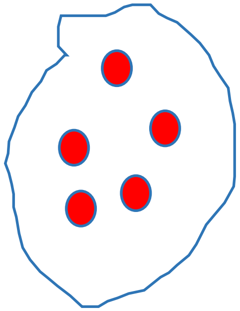
$$令 E_{p0}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$则，\ E_p(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{(x_0,y_0,z_0)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2.4.2　机械能守恒定律

一、质点系的功能原理

将质点的动能定理推广到由n个质点构成的系统（质点系）



$$\begin{cases} A_1 = E_{k1} - E_{k10} \\ \quad\vdots \\ A_n = E_{kn} - E_{kn0} \end{cases}$$

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = (E_{k1} + E_{k2} + \cdots + E_{kn}) - (E_{k10} + E_{k20} + \cdots + E_{kn0})$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} - \sum_{i=1}^{n} E_{ki0} = E_{ki} - E_{ki0}$$

$$A = E_{ki} - E_{ki0}$$

E_{ki0}为系统总的初动能之和，E_{ki}为系统总的末动能之和，A为作用在系统内n个质点上全部力所作的功的代数和

2.4.2 机械能守恒定律

作用在质点系的力所作的功等于该质点系动能的增量

$$A = A_{外} + A_{内} = A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = A_{外} - \Delta E_p + A_{非保内} = \Delta E_k$$

$$\begin{aligned} A_{外} + A_{非保内} &= \Delta E_k + \Delta E_p \\ &= (E_{k2} - E_{k1}) + (E_{p2} - E_{p1}) \\ &= (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) \\ &= E_2 - E_1 \end{aligned}$$

$$A_{外} + A_{非保内} = \Delta E$$

式中$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_k} + \boldsymbol{E_p}$为系统的机械能。上式为质点系的功能原理

2.4.2 机械能守恒定律

二、机械能守恒定律

$$A_{外} + A_{非保内} = \Delta E = E_2 - E_1$$

当$\boldsymbol{A}_{外} + \boldsymbol{A}_{非保内} < \mathbf{0}$时，系统的机械能减少；反之，系统的机械能增加；当$\boldsymbol{A}_{外} + \boldsymbol{A}_{非保内} = \mathbf{0}$时，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathbf{0}}$ =常量

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = 常量$$

若一个系统内非保守内力和一切外力都不做功，或者它们的总功为零，则系统的机械能守恒。

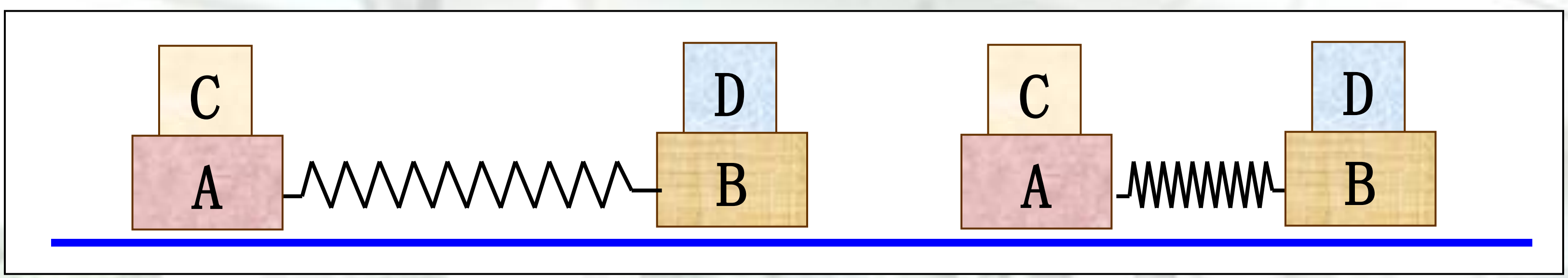
2.4.2　机械能守恒定律

讨论

　　如图所示的系统，物体A，B置于光滑的桌面上，物体A和C，B和D之间摩擦因数均不为零，首先用外力沿水平方向相向推压A和B，使弹簧压缩，后拆除外力，则A和B弹开过程中，对 A、B、C、D 组成的系统

（A）动量守恒，机械能守恒（B）动量不守恒，机械能守恒

（C）动量不守恒，机械能不守恒（D）动量守恒，机械能不一定守恒



作业

教材习题（P45-P46）： 2.8、2.10、2.15、2.16、2.18、2.20