1.2.5 加速度

加速度描述速度在某一时刻速度大小和方向的变化

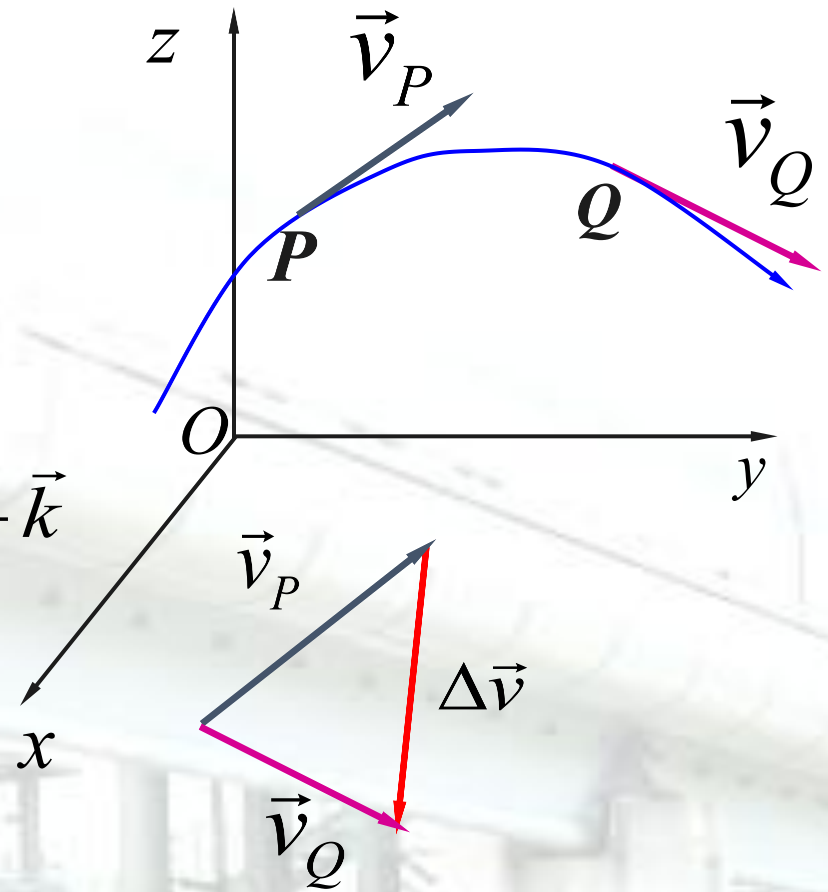
1 平均加速度

单位时间内的速度增量

即平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{k}$$



$\bar{\vec{a}}$与$\overrightarrow{\Delta v}$同方向

1.2.5 加速度

2 瞬时加速度

当$\Delta t \to 0$时，平均速度的极限值为瞬时加速度，简称加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$= \frac{d^2 x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2}\vec{k}$$

$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

加速度的大小为

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

1.2.5 加速度

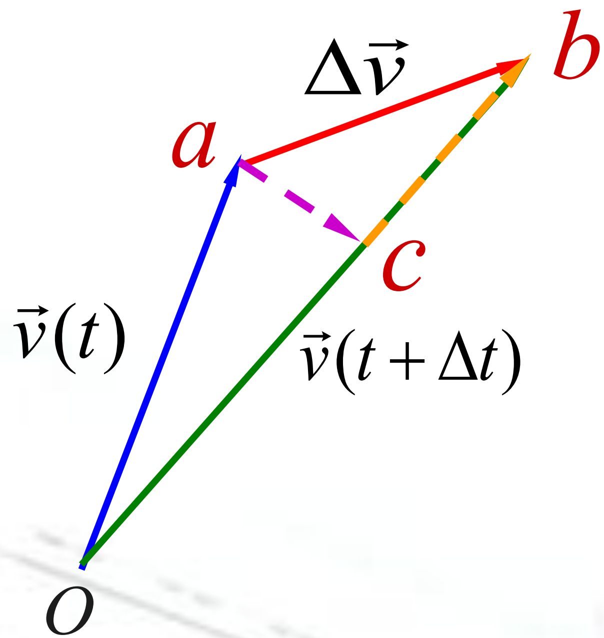
例1.4 某质点的运动学方程为$\vec{r}=-20\vec{i}+15t\vec{j}+5t^2\vec{k}$（其中$\vec{r}$以m计，t以s计）。求质点的加速度。

1.2.5 加速度

讨论 $|\Delta\vec{v}| \neq \Delta v$?

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)|$$



在Ob上截取$\overline{Oc} = \overline{Oa}$，有

$$\Delta v = cb$$

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb}$$

$$= \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_t$$

$$\begin{cases} \Delta\vec{v}_n = \overrightarrow{ac} \\ \Delta\vec{v}_t = \overrightarrow{cb} \end{cases}$$

速度方向变化

速度大小变化

1.2.5 加速度

讨论 $|\vec{a}| = a\,?$

例 匀速率圆周运动

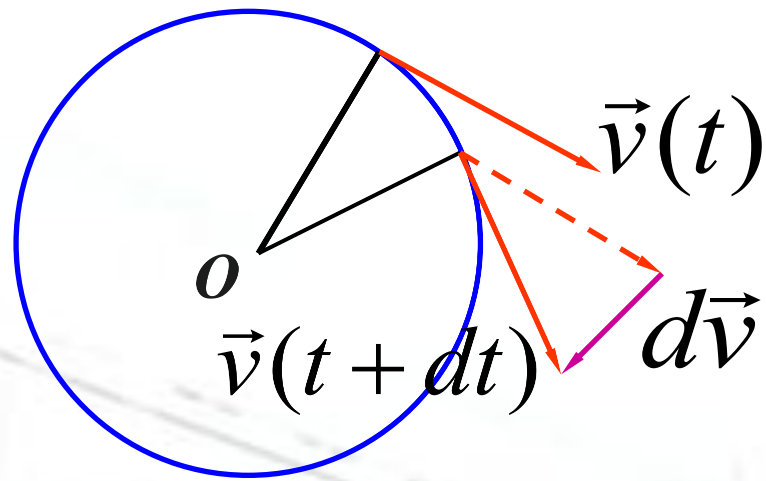
因为$v(t)=v(t+dt)$

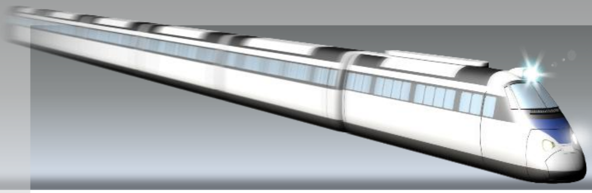
$$\therefore a = \frac{dv}{dt} \equiv 0$$

而

$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{v}|}{dt} \neq 0$$

$$\therefore |\vec{a}| \neq a$$





1.3 直线运动

当质点沿一条直线运动时，其运动为直线运动

质点直线运动的运动方程

$$x = x(t)$$

质点在直线运动中的速度

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

质点在直线运动中的加速度

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 v_x}{dt^2}$$

若已知质点的速度，则它的位置坐标为

$$\int v_x dt = x(t) + C_1$$

若已知质点的加速度，则它的速度为

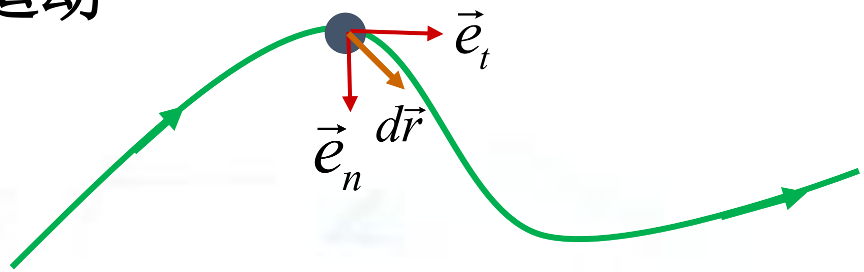
$$\int a_x dt = v_x(t) + C_2$$

上一页 下一页 返回目录

1.4 曲线运动

1.4.1 自然坐标系

质点做如图曲线运动



建立自然坐标系，其两个基矢（模为1）分别为：

$\vec{e}_t$:通常指向速度方向，即运动方向一侧的切线方向

$\vec{e}_n$:与$\vec{e}_t$垂直，指向运动曲线凹侧

质点的速度为

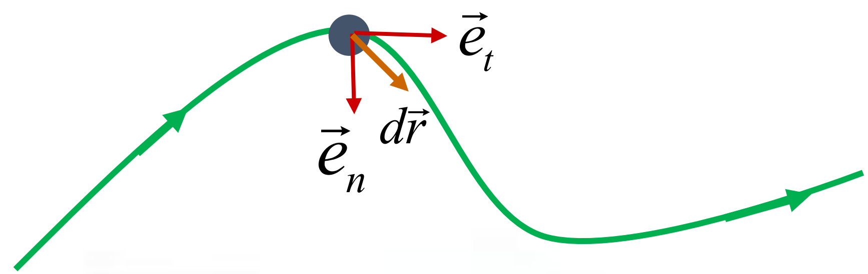
$$\vec{v} = v\vec{e}_t$$

质点的加速度为

$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

上一页 下一页 返回目录

1.4.1 自然坐标系



$$\vec{a}=\frac{d(v\vec{e}_t)}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

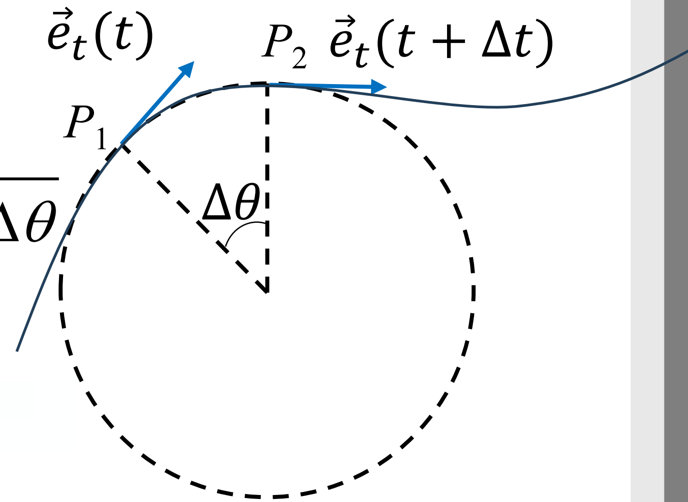
切向加速度，反映速率随时间的变化率$\vec{a}_t=\dfrac{dv}{dt}\vec{e}_t=\dfrac{d^2s}{dt^2}\vec{e}_t$

法向线加速度，反映速度方向随时间的变化率$\vec{a}_n$，指向轨道内侧

1. 4. 1 自然坐标系

根据余弦定理得

$$|\Delta\vec{e}_t(t)|$$
$$=\sqrt{|\vec{e}_t(t)|^2+|\vec{e}_t(t+\Delta t)|^2-2|\vec{e}_t(t)||\vec{e}_t(t+\Delta t)|\cos\Delta\theta}$$
$$=\sqrt{1+1-2\cos\Delta\theta}$$

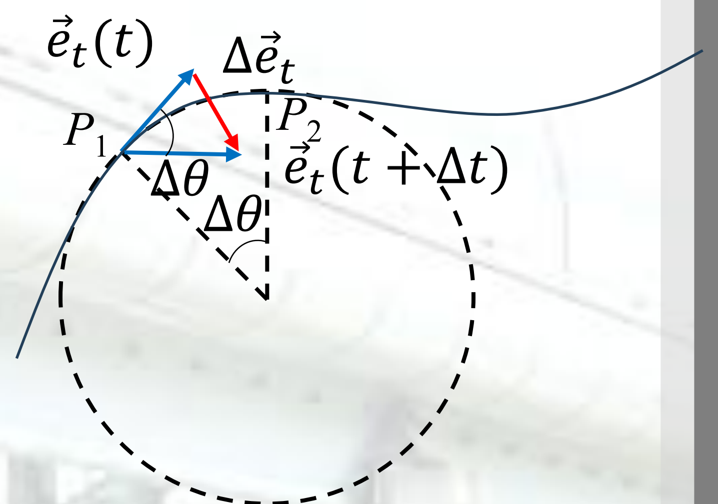


当$\Delta\theta\rightarrow 0$时，

$$\cos\Delta\theta\approx 1-\frac{\Delta\theta^2}{2}$$

则

$$|\Delta\vec{e}_t(t)|\approx\sqrt{\Delta\theta^2}=\Delta\theta$$
$$\Delta\vec{e}_t(t)=\vec{e}_n(t)\Delta\theta$$



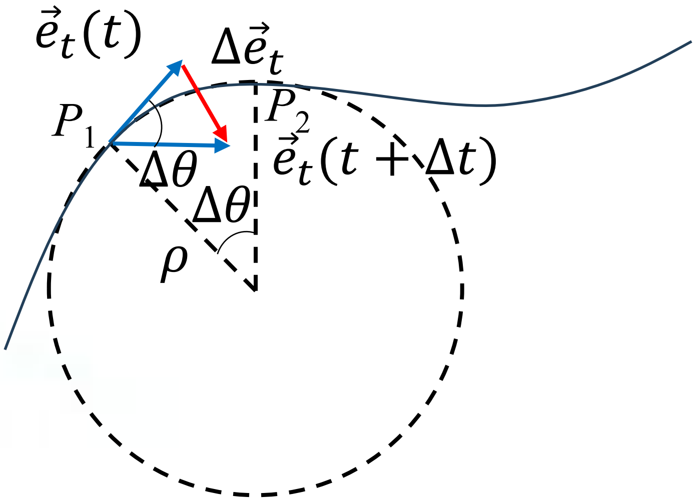
所以

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{e}_t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{e}_n=\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n$$

上一页 下一页 返回目录

1.4.1 自然坐标系

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n=?$$



设P_1处曲率半径为ρ，则$ds=\rho d\theta$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt}=\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{e}_n=\frac{1}{\rho}v\vec{e}_n$$

则

$$\vec{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

所以质点加速度为

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

加速度大小为

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$$

$\boldsymbol{\vec{a}}$与$\boldsymbol{\vec{v}}$（即$\vec{e}_t$）之间的夹角φ

$$\tan\varphi=\frac{a_n}{a_t}$$

上一页 下一页 返回目录

1.4.1 自然坐标系

例1.5 一质点作半径r=25m的圆周运动，其路程与时间的关系为s＝t^3+2t^2 ，式中s和t的单位分别为m和s。求：t＝2s时质点的切向加速度、法向加速度及加速度的大小。

解　由运动学方程可求得

$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2+4t$$

因而有

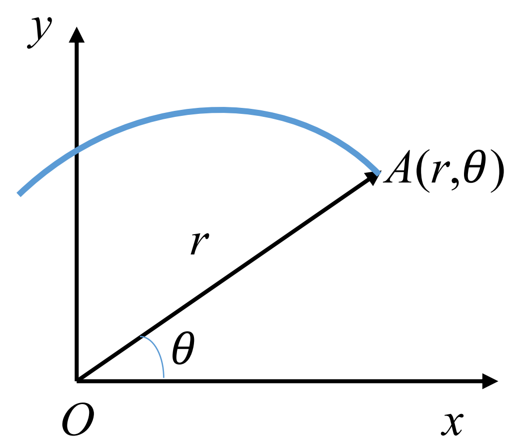
$$a_t=\frac{dv}{dt}=6t+4, a_n=\frac{v^2}{r}=\frac{(3t^2+4t)^2}{25}$$

当t=2s时，$a_t=16m/s^2$， $a_n=16m/s^2$。加速度的大小为

$$a_n=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=16\sqrt{2}m/s^2$$

1.4.2 平面极坐标系

质点在Oxy平面上运动，运动到点A时，可以用坐标(r,θ)描述点A的位置，其中r为矢径$\vec{r}$的大小，θ为$\vec{r}$与x轴之间的夹角。此参考系为**平面极坐标系**。



当$\Delta t \to 0$时，质点的瞬时角速度，简称**角速度**，为

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

国际制单位为rad/s

瞬时角加速度，简称**角加速度**，为

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

国际制单位为$\mathrm{rad/s^2}$

上一页 下一页 返回目录

1.4.2 平面极坐标系

例1.6 某质点作半径为R的圆周运动，已知其运动学方程为$\theta = 2t^3$，式中θ和t的单位分别为rad和s。试求t=3s时的角速度和角加速度。

解　由式（1.28）得

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 6t^2$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 12t$$

当t=3s时

$$\omega = 54rad/s$$

$$\alpha = 36rad/s$$

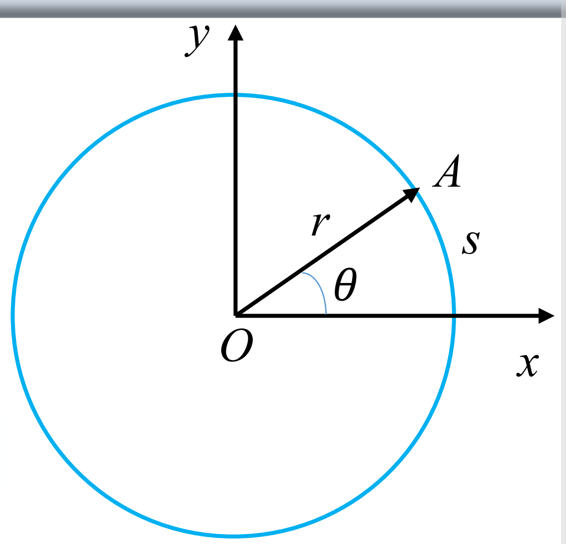
上一页 下一页 返回目录

1.4.3 线量与角量的关系

线量：位矢、速度、加速度

角量：角位置、角速度、角加速度

圆周运动根据弧长与角度的关系$s=r\theta$，



$$\frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}$$

则

$$v=r\omega$$

将上式对t求导得

$$\frac{dv}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}$$

即

$$a_t=r\alpha$$

法向加速度$a_n=\frac{v^2}{r}=r\omega^2$