§2-2 动量　动量守恒定律

力的瞬时效应→ 加速度：牛顿定律

力的积累效应 ——
- 力的时间积累 -- 动量定理
- 力的空间积累 -- 动能定理

2.2.1 动量　动量定理

1 动量的引入

在牛顿力学中，物体的质量可视为常数

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

式中的$\vec{p}$为物体质量与速度的乘积，称为物体的**动量**，即

$$\vec{p}=m\vec{v}$$

动量是**矢量**，方向与$\vec{v}$同；动量是相对量，与参照系选择有关

2.2.1 动量　动量定理

2 冲量的概念

$$\vec{F}dt = d\vec{p} = d(m\vec{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$为作用力$\vec{F}$在时间$t_1 \to t_2$内的累计效应，称为冲量$\vec{I}$

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

物体所受外力的冲量等于物体动量的增量。在直角坐标系中

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} = p_{2x} - p_{1x}$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y} = p_{2y} - p_{1y}$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z} - mv_{1z} = p_{2z} - p_{1z}$$

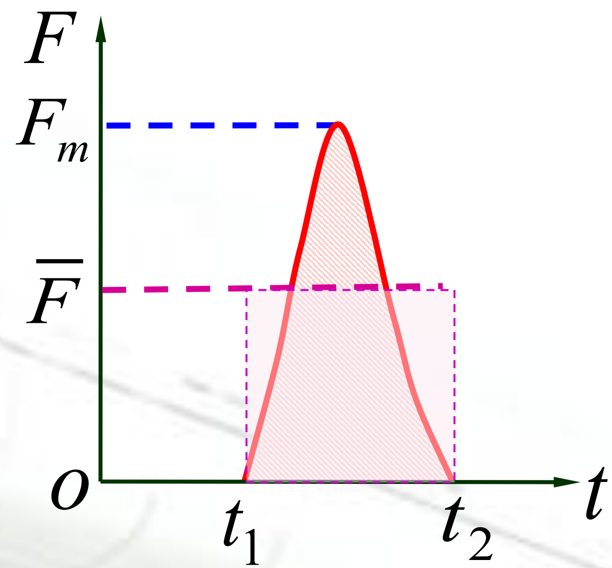
上一页 下一页 返回目录

3 动量定理的应用

动量定理常应用于碰撞问题平均冲力概念

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\bar{\vec{F}}(t_2-t_1)$$

$$\bar{\vec{F}}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$



1） 平均冲力的估算

2） 当动量的变化是常量时，有

$$\overline{F}\propto\frac{1}{\Delta t}$$

为什么：用手接篮球的时候，手顺球运动的方向移动？在商品运输过程中，给商品加上软包装？

2.2.1 动量　动量定理

例2-6　一质量为m的质点在Oxy平面上运动，其位矢为$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$。求在$t=0$到$t=\pi/2\omega$时间内，质点所受合力的冲量和质点动量的改变量。

解

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a\omega^2\cos\omega t\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\vec{j}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

合外力的冲量为

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = \int_{t_1}^{t_2} -m\omega^2(a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j})dt = -m\omega(a\vec{i} + b\vec{j})$$

质点的动量改变量

$$\Delta\vec{p} = \vec{I} = -m\omega(a\vec{i} + b\vec{j})$$

2.2.1 动量　动量定理

例2-7 当子弹在枪膛内加速时，它所受的合力为$F=a-bt$，式中a,b为为常量，子弹由枪口射出时的速率为v_0。假设子弹离开枪口时，所受合力刚好为零，试计算：（1）子弹走完枪膛所需的时间（2）子弹所受的冲量（3）子弹的质量

解（1）子弹在枪口所受合外力为零

$$F=a-bt=0$$

$$t=\frac{a}{b}$$

（2）$I=\int_0^t Fdt=\int_0^{a/b}(a-bt)dt=\frac{a^2}{2b}$

（3）
$$I=\Delta p=mv_0-m\cdot 0$$

$$m=\frac{I}{v_0}=\frac{a^2}{2b}$$

2.2.2 动量守恒定律

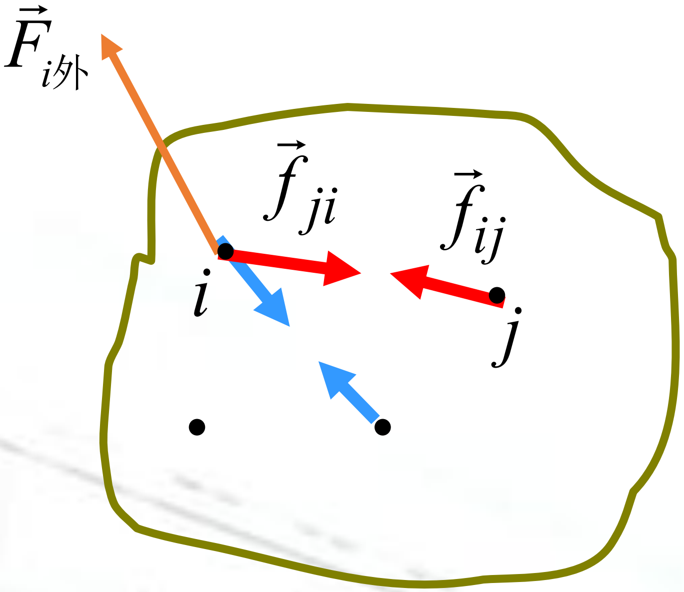
1 内力与外力

***i*质点所受的内力**

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji}$$

***i*质点所受合力**

$$\vec{F}_{i外}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji}$$



2 *i*质点动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{i外}dt+\int_{t_1}^{t_2}(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji})dt=m_i\vec{v}_{i2}-m_i\vec{v}_{i1}$$

2.2.2 动量守恒定律

3 质点系的动量定理（对*i*求和）

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{i外}dt+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji}dt=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i1}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{i外}dt+\int_{t_1}^{t_2}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji})dt=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i1}$$

因为内力总是成对出现

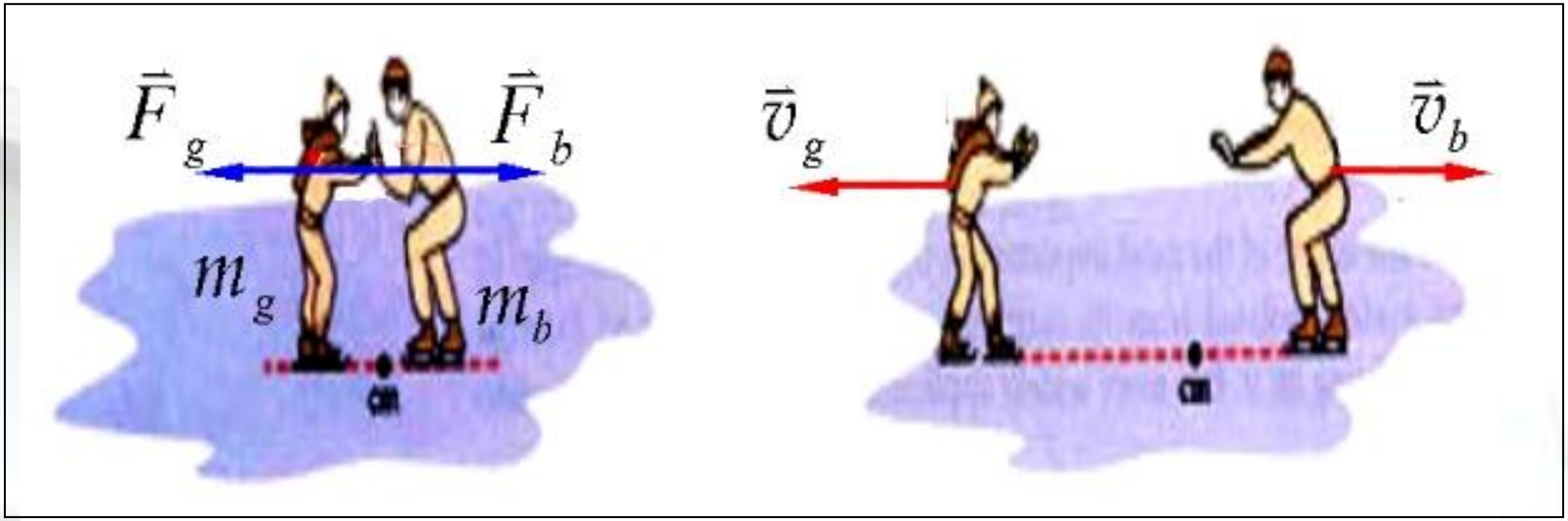
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji}=0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\right)dt=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i1}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$$

这说明内力对系统的总动量无贡献，但对每个质点动量的增减是有影响的。质点系合外力的冲量=质点系动量的增量。

2.2.2 动量守恒定律

注意　内力不改变质点系的动量



初始速度$\vec{v}_g = \vec{v}_b = 0$　　$m_b = 2m_g$　　$\vec{p} = 0$

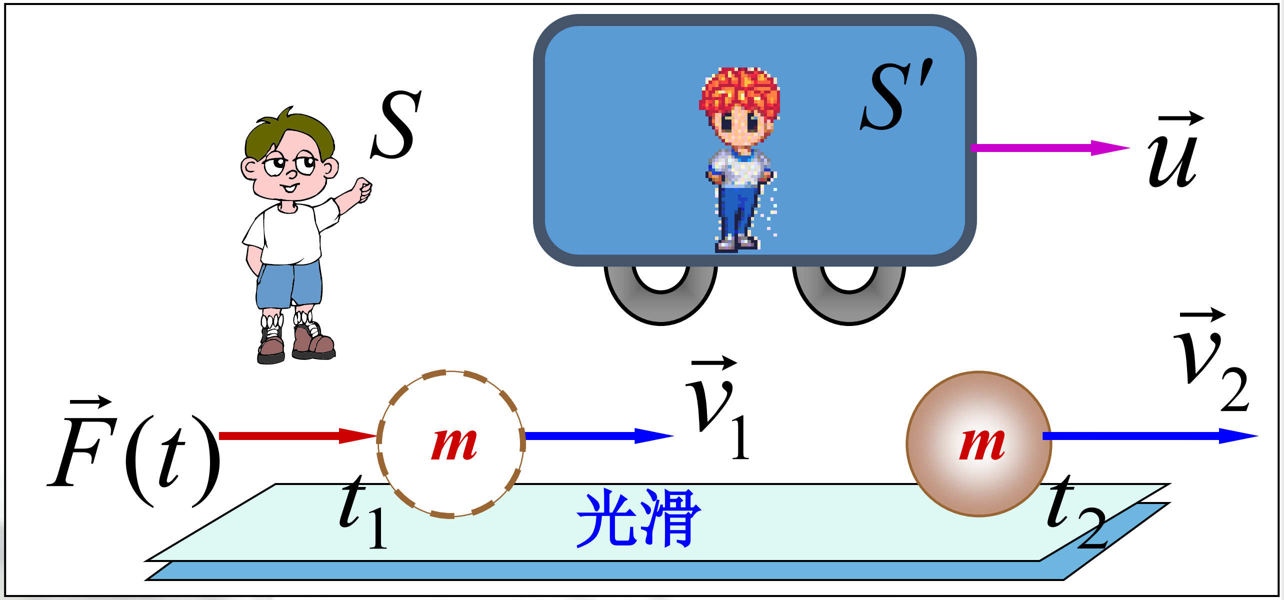
推开后$\vec{v}_g = -2\vec{v}_b$　　$\vec{p} = 0$

推开前后系统动量不变　　$\vec{p} = 0$

2.2.2 动量守恒定律

讨论

➢ 动量的相对性和动量定理的不变性



参考系	t_1 时刻	t_2 时刻	动量定理
S 系	$m\vec{v}_1$	$m\vec{v}_2$	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$
S' 系	$m(\vec{v}_1 - \vec{u})$	$m(\vec{v}_2 - \vec{u})$	

上一页 下一页 返回目录

2.2.2 动量守恒定律

4 动量守恒定理

若系统所受的合外力

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i外} = 0$$

系统总动量守恒

$$\sum_{i=1}^{n} m\vec{v}_{i2} - \sum_{i=1}^{n} m\vec{v}_{i1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m\vec{v}_{i} = 常量$$

一个孤立的力学系统（即无外力作用的系统）或合外力为零的系统，系统内各质点动量可以交换，但系统的总动量保持不变，这就是**动量守恒定律**。

上一页 下一页 返回目录

2.2.2 动量守恒定律

应用动量守恒定律应当注意：

1. 守恒条件是 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}=0$

2. 若 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}=0$ 则系统无论沿那个方向的动量都守恒；

若 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\neq 0$，但某一方向的合外力零，则该方向上动量守恒, 例

$$若\sum_{i=1}^{n}F_{i外x}=0，\quad 则\sum_{i=1}^{n}m_i v_{ix}=常数$$

3. 必须把系统内各量统一到同一惯性系中；

4. 在爆炸与碰撞等问题中，作用时间极短，内力很大，外力（空气阻力与重力等）远小于内力，外力可忽略，动量近似守恒

应用动量定理和动量守恒定律解题一般步骤:

1. 正确分析出始、末态的动量，并向选定的坐标轴进行投影

2. 列出坐标分量方程

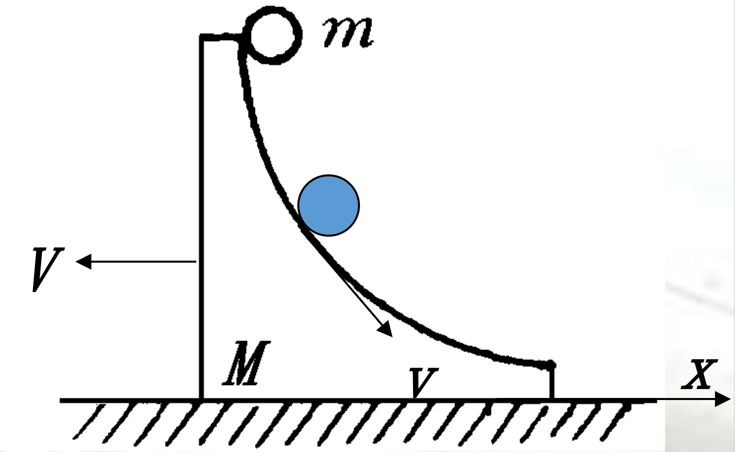
2.2.2 动量守恒定律

例　如图所示，一质量为m的球在质量为M的1/4圆弧形滑槽中从静止滑下。设圆弧形槽的半径为R，如所有摩擦都可忽略，求当小球m滑到槽底时，M滑槽在水平上移动的距离

解　以m和M为研究系统，其在水平方向不受外力，故水平方向动量守恒。设在下滑过程中，m相对于M的滑动速度为v，M对地速度为V，并以水平向右为x轴正向，则在水平方向上有

$$m(v_x - V) - MV = 0$$

$$v_x = \frac{m+M}{m} V$$



2.2.2 动量守恒定律

设m在弧形槽上运动的时间为t，而m相对于M在水平方向移动距离为R，故有

$$R=\int_0^t v_x dt=\frac{M+m}{m}\int_0^t V dt$$

于是滑槽在水平面上移动的距离

$$S=\int_0^t V dt=\frac{m}{m+M}R$$