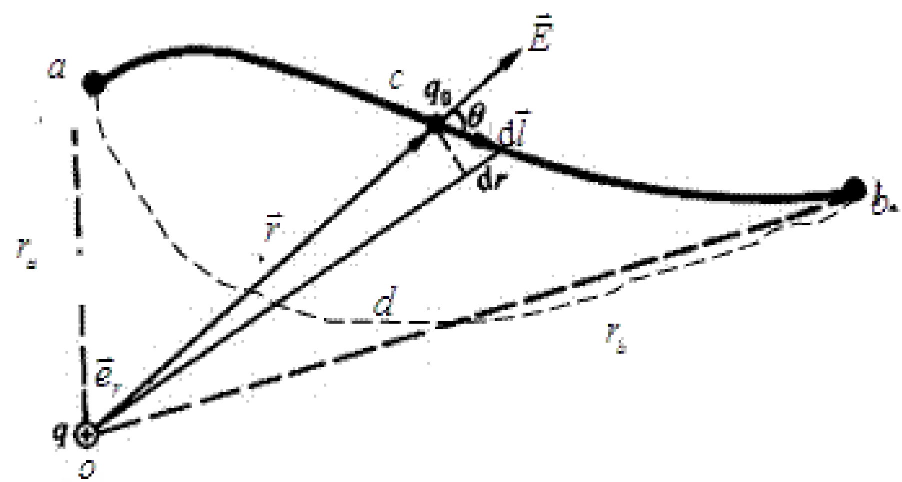
# 6.3 电场力的功 电势

## 6.3.1 静电场的环路定理

在点电荷$q$的电场中，试探电荷$q_0$沿任意路径$acb$由$a$点运动到$b$点。在$c$处，$q_0$有位移$d\vec{l}$，静电力$\vec{F}$对$q_0$的元功为



$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{l}$$

$$\vec{e}_r\cdot d\vec{l} = dl\cos\theta = dr,\quad dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$A = \int_{r_a}^{r_b} dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right]$$

# 6.3 电场力的功 电势

上述结论可以推广到任意带电体产生的电场。任何一个带电体都可看做由许多点电荷组成的点电荷系。设$q_0$在点电荷系$q_1$，$q_2$，…，$q_n$的电场中由$a$点沿任意路运动到$b$点时，由场强叠加原理，静电场力的功为

$$A=\int_{ab}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{ab}q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{ab}q_0\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_{ab}q_0\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\cdots+\int_{ab}q_0\vec{E}_n\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_0q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ai}}-\frac{1}{r_{bi}}\right)$$

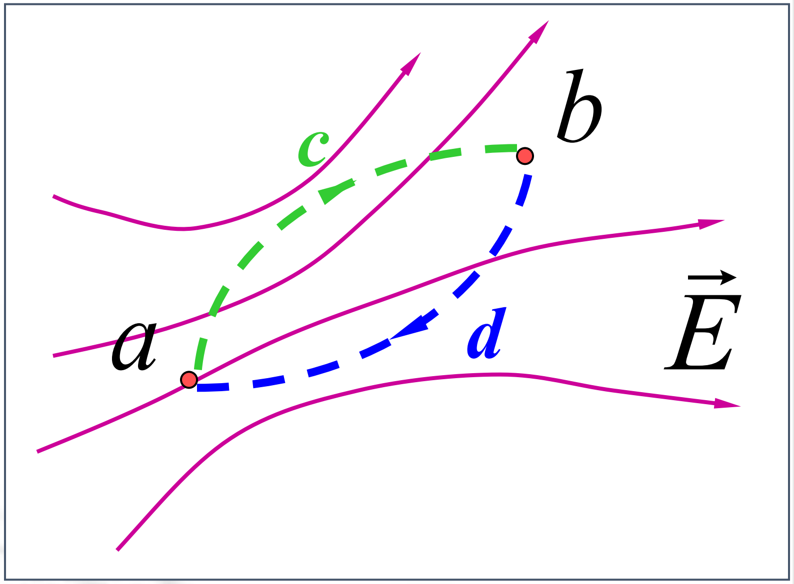
式中$r_{ai}$，$r_{bi}$分别为路径的起点和终点距点电荷$q_i$的距离

电场力的功只与始末位置有关，而与路径无关，电场力为**保守力**，静电场为**保守场**。

# 6.3 电场力的功 电势

点电荷$q_0$从$a$点出发，经过$c$点到达$b$点，然后经过$d$点回到$a$点

$$A=\oint_l q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$
$$=\int_{acb} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{bda} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$
$$=\int_{acb} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}-\int_{adb} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$
$$=0$$




$$\boxed{\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0}$$

**静电场的环路定理**：在静电场中，场强的环流恒等于零，即静电场是保守场。

# 6.3 电场力的功 电势

静电场是保守力场。静电场力所做的功等于相应电势能$W$增量的负值。

$$-\Delta W = W_a - W_b = A = q_0\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$(W_a - W_b)/q_0$与检验电荷$q_0$无关，反映静电场本身的性质，定义为静电场$a$，$b$两点的电势差为

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow A = q_0(U_a - U_b)$$

静电场中某点的电势可通过选定的势能零点确定

$$b\to\infty,\ W_b = 0 \Rightarrow W_a = A = \int_a^\infty q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

电势为标量，可正可负，单位为伏特（V）

电势零点选择方法：有限带电体以无穷远为电势零点，实际问题中常选择地球电势为零

# 6.3 电场力的功 电势

点电荷电场的电势：

点电荷的电场强度 $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

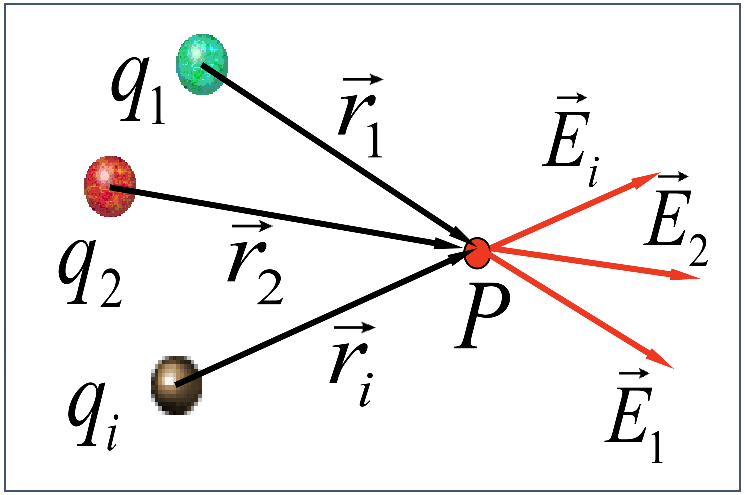
令 $U_\infty=0$

$$U_a=\int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{l}=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{U_a=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}\qquad \begin{cases} q>0,\ U_a>0 \\ q<0,\ U_a<0 \end{cases}$$

## 6.3.3 电势叠加原理

设带电系统由$n$个带电体组成，则$P$点电势为




$$U_P=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^{\infty}\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_a^{\infty}\vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_a^{\infty}\vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\cdots+\int_a^{\infty}\vec{E}_n\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=U_{1P}+U_{2P}+\cdots+U_{nP}$$

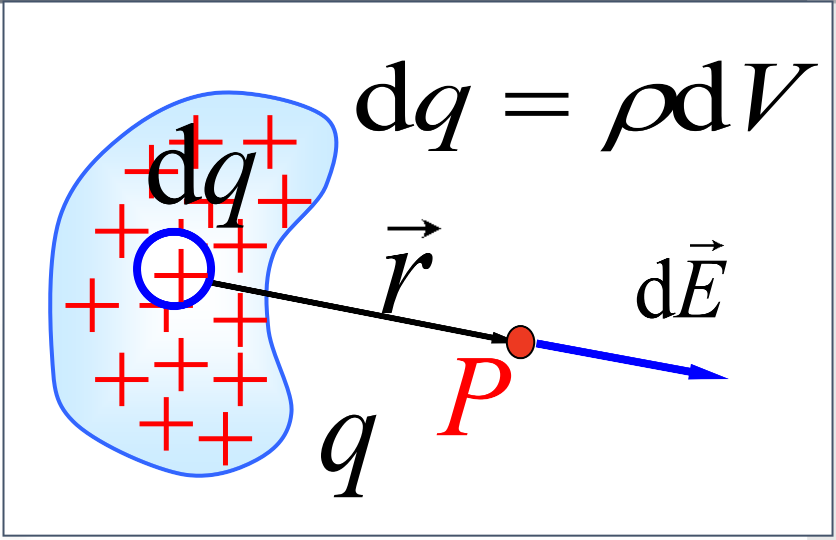
$$=\sum_{i=1}^{n}U_{iP}$$

点电荷系的电场中某点的电势等于各个点电荷单独存在时该点的电势的代数和。这一结论称为**静电场的电势叠加原理。**

# 6.3 电场力的功 电势

连续分布电荷的电势

$$U_P = \int_V dU = \int_V \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 r}$$




求电场中的电势，通常有两种方法

(1)用电势定义$U_a = \int_a^{零电势点} \vec{E} \cdot d\vec{l}$，这种方法常用于已知电场分布，或利用高斯定理很容易确定电场分布的情况。

(2)用$U_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$和$U_a = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$所表达的电势叠加原理

# 6.3 电场力的功 电势

## 一、利用电势的定义求电势

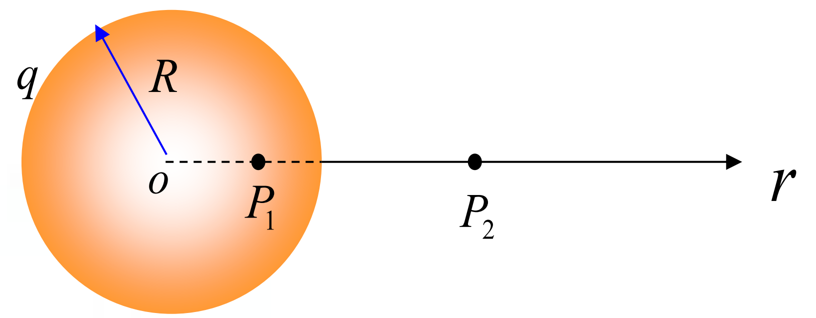
此方法常用于电场分布已知或可以利用高斯定理容易确定电场分布的情况。

解题一般步骤：根据场源分布→给出电场强度分布→选择电势零点和积分路径→依据电势定义给出电势表达式进行积分

在计算过程中，应当注意如下：

1. 选择适当的电势零点
2. 积分路径选择具有任意性，但为了积分计算方便，一般选择$d\vec{l}$与$\vec{E}$平行、垂直或有固定夹角的积分路径
3. 空间电场分布可能是离散、分区间的，此时要分区间进行积分，并在各区间积分时，必须应用该区间的电场表达式

例6.9 求由均匀带电球面的电场中的电势分布。球面半径为$R$，总带电量为$+q$。




解：$r < R,\ E_1 = 0$

$$r > R,\ E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\ (r \ge R)$$

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^R 0\mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\quad (r \le R)$$

球面外各点的电势与全部电荷集中在球心时的点电荷的电势相同；球面内任一点的电势都相等，且等于球面上的电势

# 6.3 电场力的功 电势

## 二、利用电势叠加原理求电势

1. 点电荷系电场中的电势

$$U_P=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

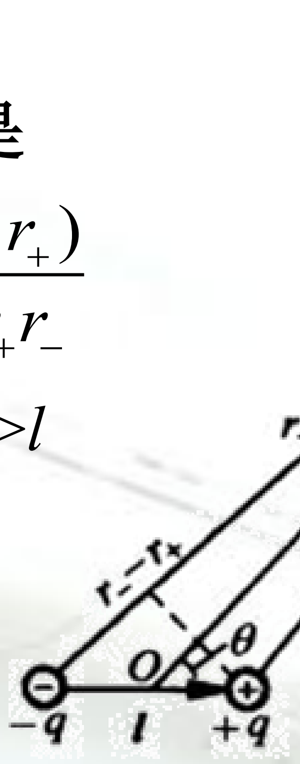
2. 连续带电体电场中的电势

$$U_P=\int_V dU=\int_V\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

3. 利用典型带电体的电势公式确定一些规则带电体的电势

$$U_P=\int_V dU_p$$

例6.10 求电偶极子电场中电势分布。已知电偶极子的电荷分别为$+q$和$-q$，间距为$l$




解：依据电势叠加原理，P点电势是

$$U=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}=\frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-}$$

对于离电偶极子比较远的点，即$r>>l$

$$r_- - r_+ \approx l\cos\theta,\ r_- r_+ \approx r^2$$

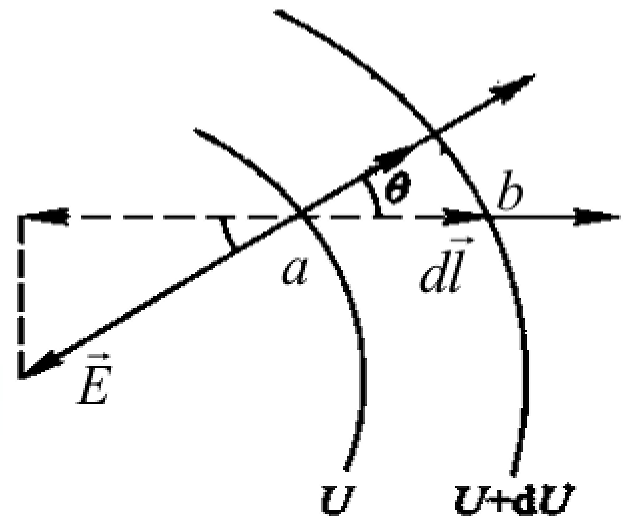
$$U=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

## 6.3.4 电场强度与电势梯度

$$\begin{cases} dA_{ab} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = -q_0(U_b - U_a) = -q_0 dU \\ dA_{ab} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = q_0 E\cos\theta dl = q_0 E_l dl \end{cases}$$

$$\Rightarrow -dU = E_l dl$$




$$\boxed{E_l = -\frac{dU}{dl}}$$

电场中某一点的场强沿某一方向的分量，等于电势沿该方向上变化率的负值。

# 6.3 电场力的功 电势

在直角坐标系中

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})}$$

$$\vec{E} = -gradU = -\vec{\nabla}U, \ \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

电场中任意一点的场强等于该点电势梯度的负值。电势梯度的单位为伏特/米（V/m）

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\vec{e}_n$$

$\vec{e}_n$是等势面的单位法线矢量。

# 6.3 电场力的功 电势

## 课堂讨论

1）电场弱的地方电势低；电场强的地方电势高吗？

2）$U$=0的地方，$\vec{E}$一定等于0吗？

3）$\vec{E}$相等的地方，$U$一定相等吗？等势面上$\vec{E}$一定相等吗？

# 作业

教材习题（P164-P165）： 6.9、6.10、6.11、6.12、6.18