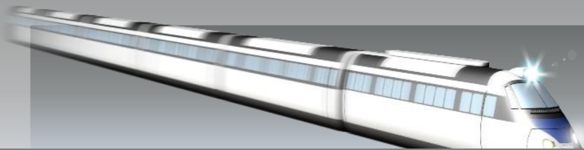
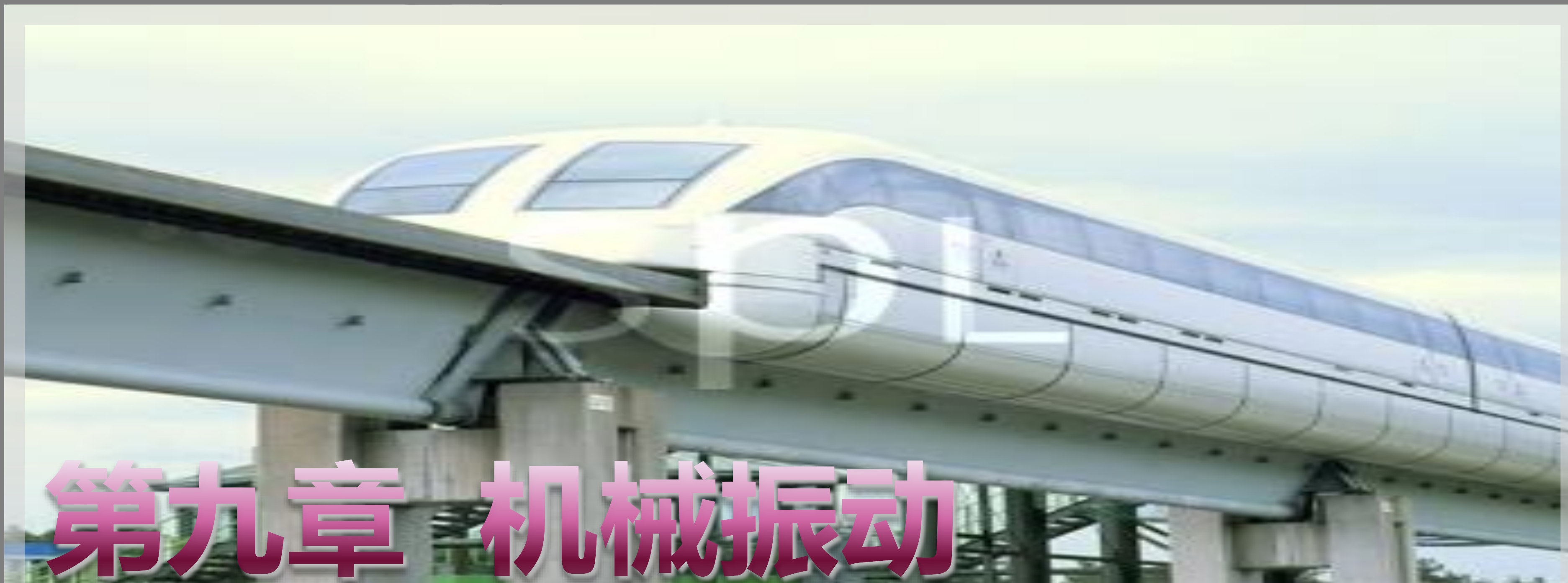




第九章 机械振动

前　　言

1 什么是振动：

物体在一固定位置附近作来回的往复运动，称为机械振动。物体在发生摇摆、颠簸、打击、发声之处均有振动。任何一个具有质量和弹性的系统在其运动状态发生突变时，都会发生振动。

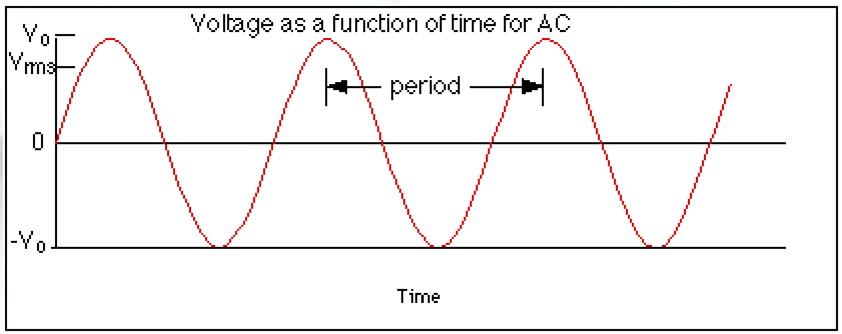
广义地，凡是描述物质运动状态的物理量，在某一固定值附近作周期性变化，都可称该物理量作振动。

上一页 下一页 返回目录

前　　言

2 振动的特征

（在时间上）具有某种重复性。任何一个物理量在某一量值附近随时间作周期性变化都可以叫做振动。例如交流电路中的电流、电压，振荡电路中的电场强度和磁场强度等。



振动分为周期和非周期振动。简谐振动最简单、最基本的振动，例如，弹簧谐振子。

简谐运动 ⟷ 复杂振动

合成

分解

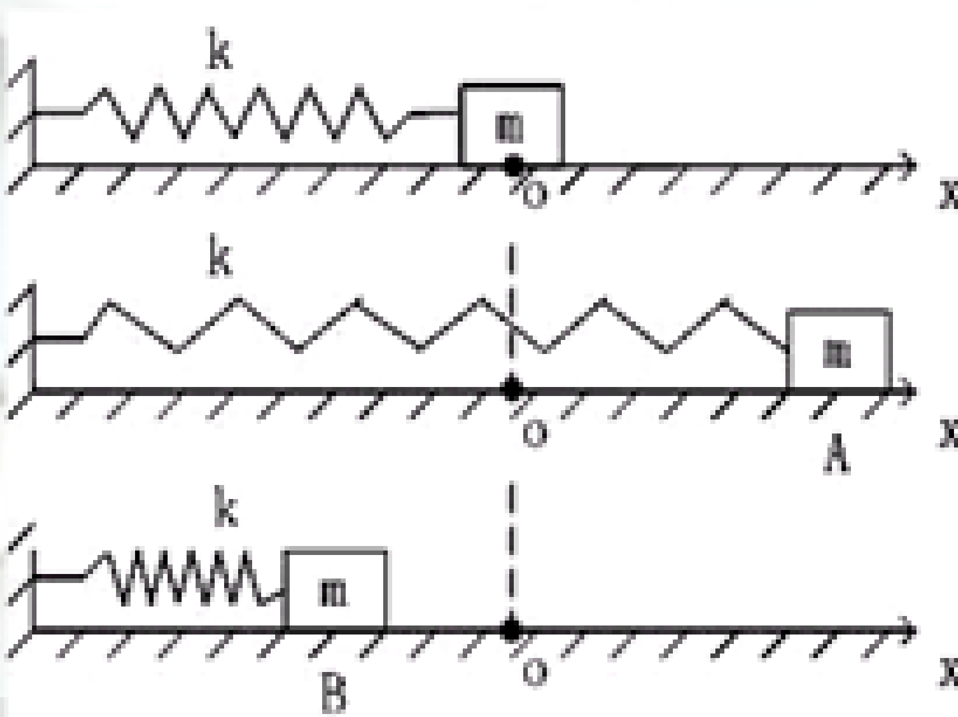
上一页 下一页 返回目录

简谐振动的动力学特征

任何一个振动都可看成若干不同频率的简谐振动的合成。

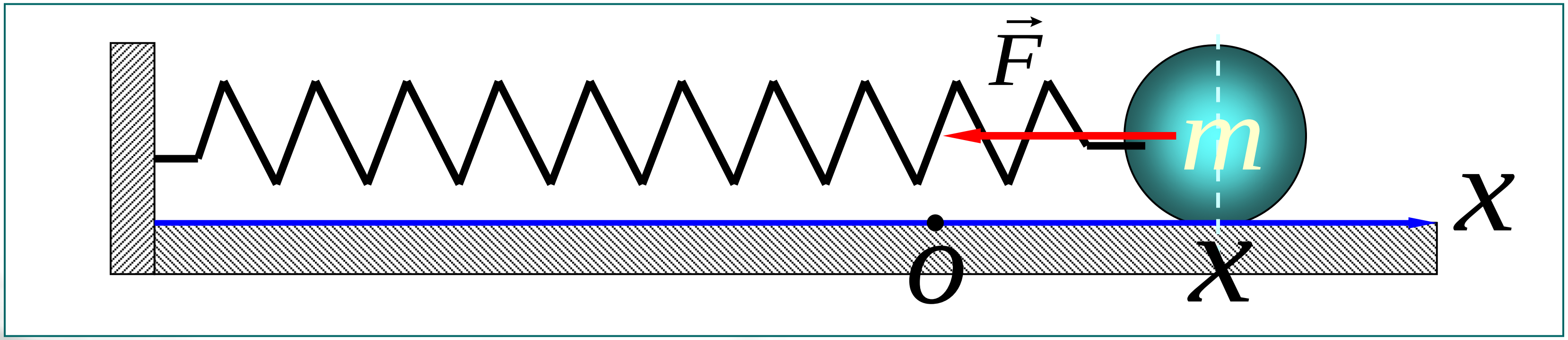
简谐运动 ⟷（合成 / 分解）复杂振动

弹簧振子模型



页
下一页
返回目录

弹簧振子模型



a 与 x 方向相反

$$\begin{cases} F = -kx = ma \\ a = \dfrac{d^2x}{dt^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

$\omega^2 = k/m$

简谐振动的运动学

弹簧振子的位移

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \quad \rightarrow \quad x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$\because \ \cos(\omega t+\varphi_0)=\sin(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2})$$

$$令 \quad \varphi'=\varphi_0+\frac{\pi}{2}$$

$\therefore x=A\sin(\omega t+\varphi')$ 位移也可用正弦函数表示。

作简谐振动的质点在任意时刻的速度和加速度表达式分别为

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\phi_0)=A\omega\cos(\omega t+\phi_0+\frac{\pi}{2})$$

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)=A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0+\pi)$$

描述简谐振动的三个重要参量

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

1 振幅A

$$A = |x_{\max}|$$

初始条件：$t=0$，$x=x_0$，$v=v_0$

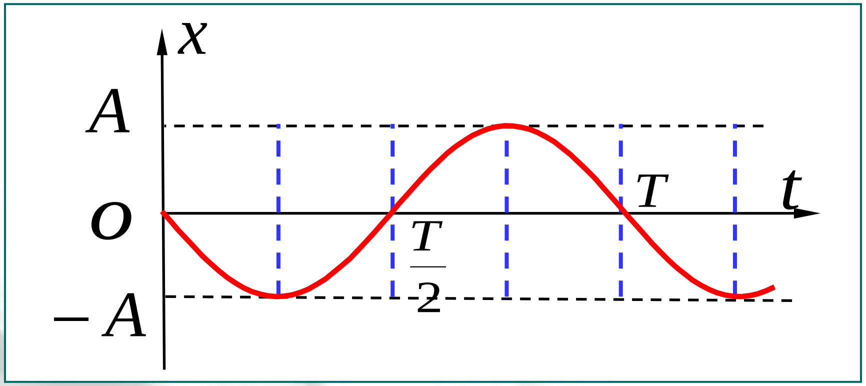
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi_0 = \dfrac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

对给定振动系统，振幅和初相由初始条件决定。

描述简谐振动的三个重要参量

2 周期、频率、圆频率

物体作一次完全振动所经历的时间叫做振动的**周期**T



◆ 周期s

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos[\omega(t+T)+\varphi_0] = A\cos[\omega t + \varphi_0 + 2\pi]$$

$$\Downarrow$$

$$T = 2\pi / \omega$$

对给定的振动系统，其周期仅与振动系统**本身**的物理性质有关

例如弹簧振子周期 $T = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{m/k}$

描述简谐振动的三个重要参量

2 周期、频率、圆频率

- 频率Hz

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

单位时间内物体所作的完全振动次数叫做频率，用ν表示。

- 圆频率rad/s

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

ω表示在秒内，物体所做的完全振动（全振动）次数。

简谐振动还可以表示为

$$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

描述简谐振动的三个重要参量

3 相位和初相

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

$(\omega t + \varphi_0)$ 称为相位，相位是决定振动物体运动状态的物理量。

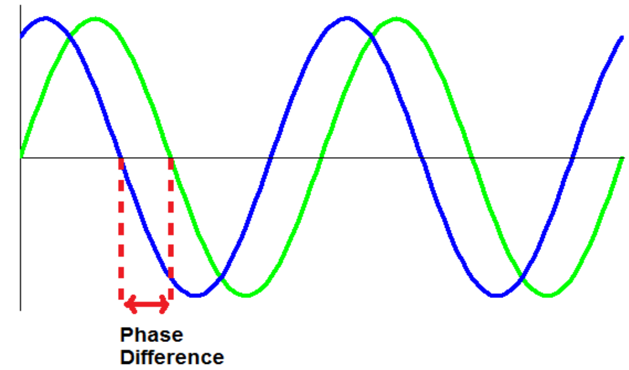
① 存在一一对应的关系

$$\omega t + \varphi_0 = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = A, v = 0 \Rightarrow \text{物体在位移最大处速度为零} \\ \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0, v = -\omega A \Rightarrow \text{物体在平衡位置以最大} \\ \qquad \text{速率向}x\text{轴负方向运动} \\ -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0, v = \omega A \Rightarrow \text{物体在平衡位置以最大} \\ \qquad \text{速率向}x\text{轴正方向运动} \end{cases}$$

描述简谐振动的三个重要参量

② 相位在0~2π内变化，质点无相同的运动状态；相差$2n\pi$(n为整数)，质点运动状态全同（周期性）

③ 初相位φ_0，即t=0时的相位，描述质点初始时刻的运动状态



两振动相位之差$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$，称为相位差。若$\Delta\varphi = 2n\pi$，则称两振动相位相同（或同相），若两振动振幅和频率也相同，则表明此时它们的振动状态相同；若$\Delta\varphi = (2n+1)\pi$，则称两振动相位相反（或反相），表明此时它们的振动状态相反；若$0 < \Delta\varphi < \pi$，则称φ_2超前于φ_1，或说 φ_1滞后于φ_2。总之，相位差的不同反映了两个振动的不同。

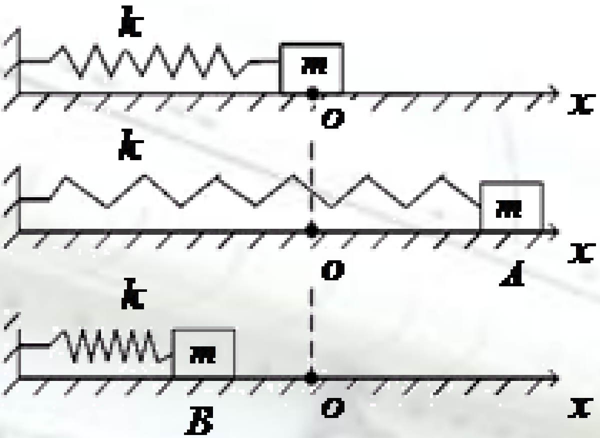
例 如图所示的弹簧振子，已知弹簧的劲度系数k=1.60N/m，物体的质量M=0.40kg, 试就下列两种情况求谐振动表达式。

(1)将物体从平衡位置向右移到x=0.1m处释放；

(2)将物体从平衡位置向右移到x=0.1m处后并给物体以向左的速度0.20m/s。

解：（1）设振动表达式为$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

则由题意知角频率



$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{1.4}{0.6}} = 2rad/s$$

当t=0时，$x_0 = 0.1m$，$v_0 = 0m/s$

上一页 下一页 返回目录

（2）当$t=0$时， $x_0 = 0.1m$，$v_0 = -0.2m/s$

$$\text{振幅}A=\sqrt{x_0^2+\frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{0.10^2+\left(\frac{-0.20}{2}\right)^2}=0.10\sqrt{2}=0.1414(m)$$

$$x_0=0.1\sqrt{2}\cos\varphi_0=0.1\Rightarrow\cos\varphi_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_0=-0.1\sqrt{2}\omega\sin\phi_0=-0.2<0$$

$$\therefore\phi_0=\frac{\pi}{4}$$

$$\text{振子的振动表达式为}x=0.1414\cos(2t+\frac{\pi}{4})\ m$$

简谐振动的矢量表示法

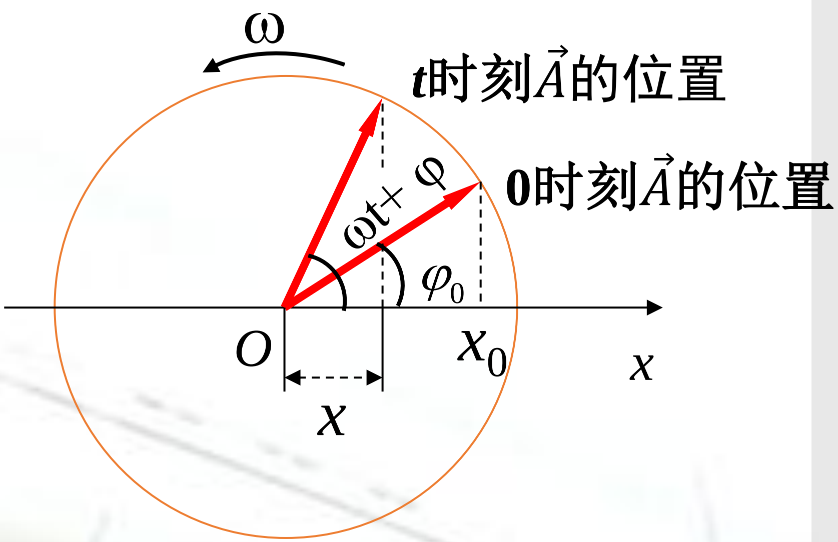
1 旋转矢量

(1) 旋转矢量的制作

若已知一个谐振动

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

相应的旋转矢量如图所示。



(2) 旋转矢量的作用

使描述简谐振动的三个重要参数A,ω,φ形象化

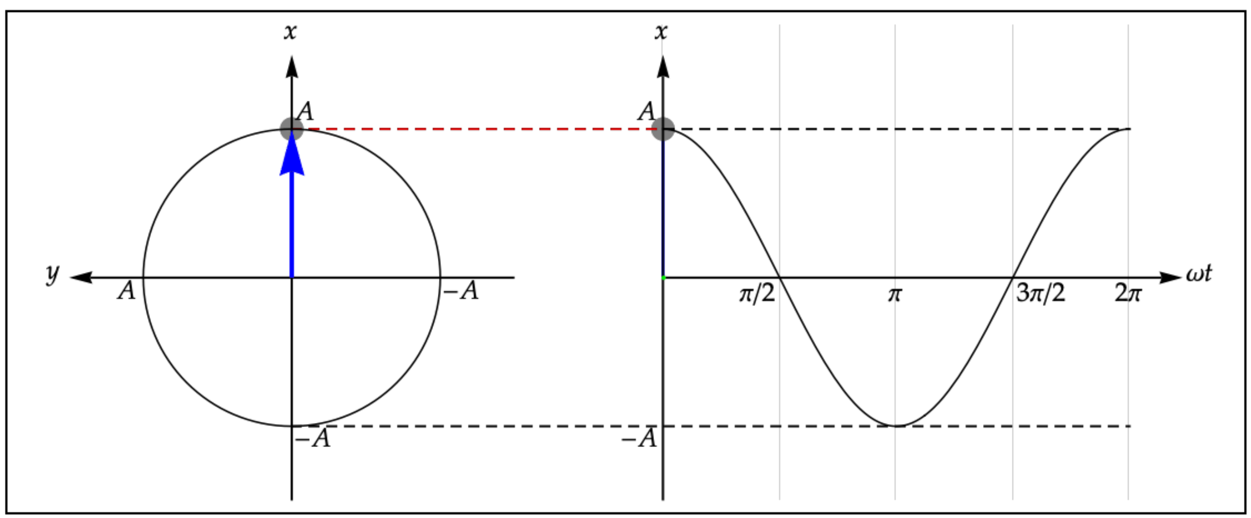
(3) 旋转矢量本身不是谐振动

习惯上用$\vec{A}$在x轴上的投影描述振动

简谐振动的矢量表示法

2 旋转矢量与简谐振动的关系

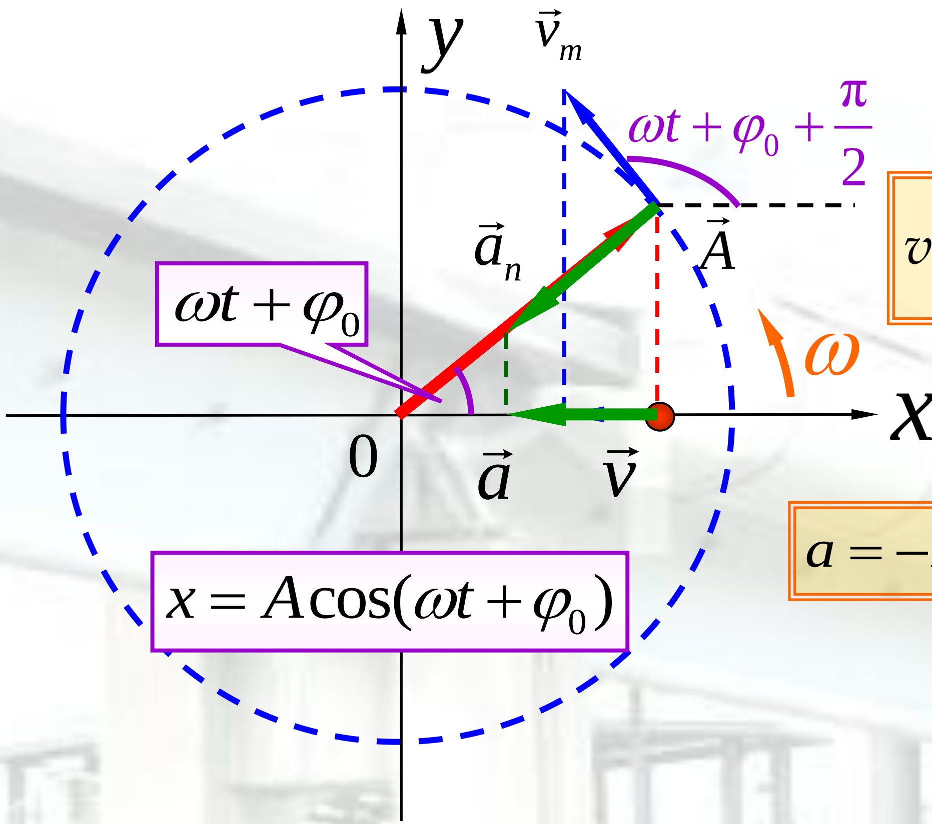
(1)$\vec{A}$的模等于振幅A；$\vec{A}$旋转的角速度等于简谐振动的角频率，$\vec{A}$转动一周相当于物体在x轴上做一次全振动；t=0时，$\vec{A}$与x轴的夹角为初相位φ_0；$\vec{A}$的端点在x轴上的投影为简谐振动



简谐振动的矢量表示法

2 旋转矢量与简谐振动的关系

(2)可以借助旋转矢量图求出简谐振动的速度和加速度。



$$v_m=A\omega$$

$$a_n=A\omega^2$$

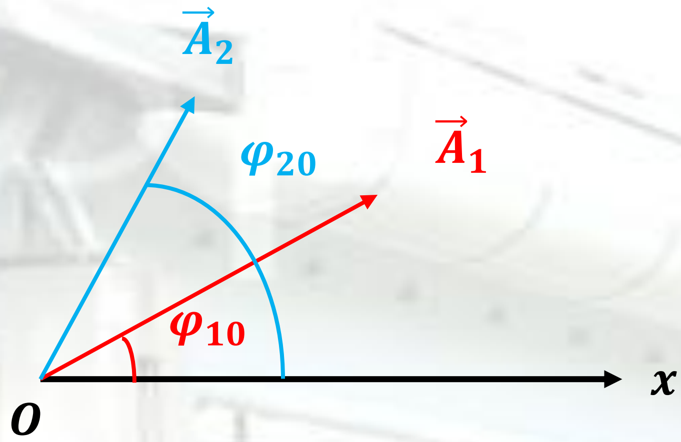
$$\boxed{v=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2})}$$

$$\boxed{a=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)}$$

简谐振动的矢量表示法

(3)利用旋转矢量图，可以方便地比较两个同频率$\boldsymbol{\omega}$简谐振动的“步调”。

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{20}) - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10}$$

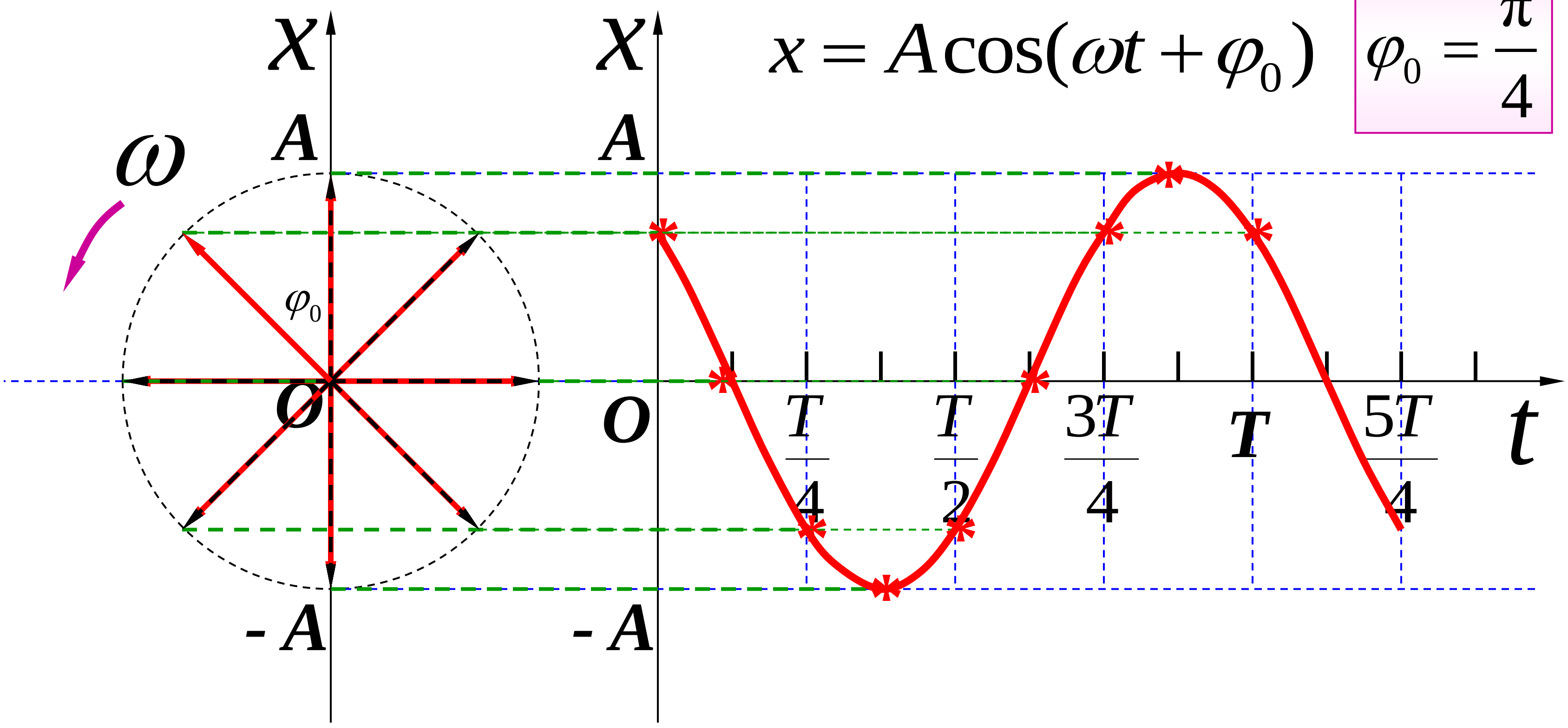


简谐振动的矢量表示法

用旋转矢量图画简谐运动的x-t图

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$



$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

简谐振动的合成

同方向同频率谐振动的合成

$x_1 = A_1\cos(\omega t+\phi_{10}), x_2 = A_2\cos(\omega t+\phi_{20})$，求：$x = x_1 + x_2$

1 计算法

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\varphi_{10}) + A_2\cos(\omega t+\varphi_{20})$$
$$= \cos\omega t(A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}) - \sin\omega t(A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20})$$

令 $\begin{cases} A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20} = A\cos\varphi_0 \\ A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20} = A\sin\varphi_0 \end{cases}$

$$x = A\cos\omega t\cdot\cos\varphi_0 - A\sin\omega t\cdot\sin\varphi_0 = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

合振幅：$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})}$

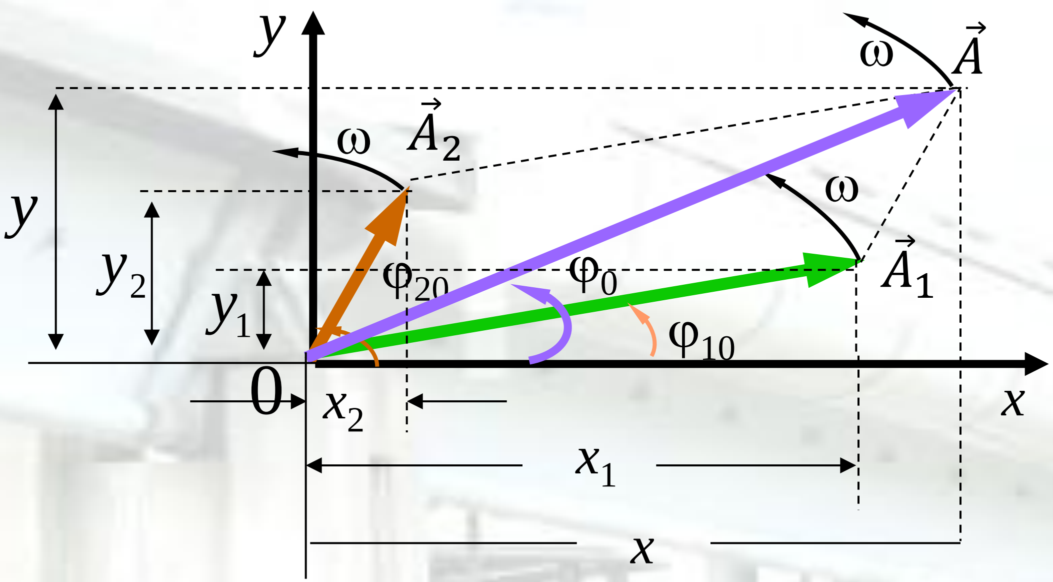
初相位：$\varphi_0 = \tan^{-1}\dfrac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}}$

两个同方向、同频率的谐振动的合振动仍是同频率的谐振动

同方向同频率谐振动的合成

2 矢量合成法

两振动频率相同，则它们的旋转矢量以相同的角速度ω旋转，故形成稳定的平形四边形。利用矢量加法的平行四边形法则，合振动的旋转矢量为$\vec{A}$。



利用正切函数求得合振动的初位相

上一页 下一页 返回目录

同方向同频率谐振动的合成

讨论 $$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})}$$

① 位相差$\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2)$

$A=A_1+A_2$相互加强，振幅最大 $\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi_0)}$

② 位相差$\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2)$

$A=|A_2-A_1|$相互削弱，振幅最小 $\boxed{x=|A_2-A_1|\cos(\omega t+\pi)}$

③ 位相差$\Delta\varphi=$任意值

$$|A_2-A_1|<A<A_2+A_1$$

同方向不同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega_1 t+\varphi) \\ x_2 = A\cos(\omega_2 t+\varphi) \end{cases} \Rightarrow x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t+\varphi) + A\cos(\omega_2 t+\varphi)$$

$$\boxed{x = 2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)}$$

当$|\omega_2-\omega_1| \ll \omega_2+\omega_1$时

$$x = \boxed{2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)}\cos(\boxed{\frac{\omega_2+\omega_1}{2}}t+\varphi)$$

振幅部分　合振动频率

$$振幅: A = \left|2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right| \Rightarrow \begin{cases} A_{max} = 2A \\ A_{min} = 0 \end{cases}$$

同方向不同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases}\text{振动频率：}\quad \omega=(\omega_1+\omega_2)/2 \\ \text{振幅：}\quad A=\left|2A\cos\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right| \Rightarrow \begin{cases}A_{max}=2A \\ A_{min}=0\end{cases}\end{cases}$$

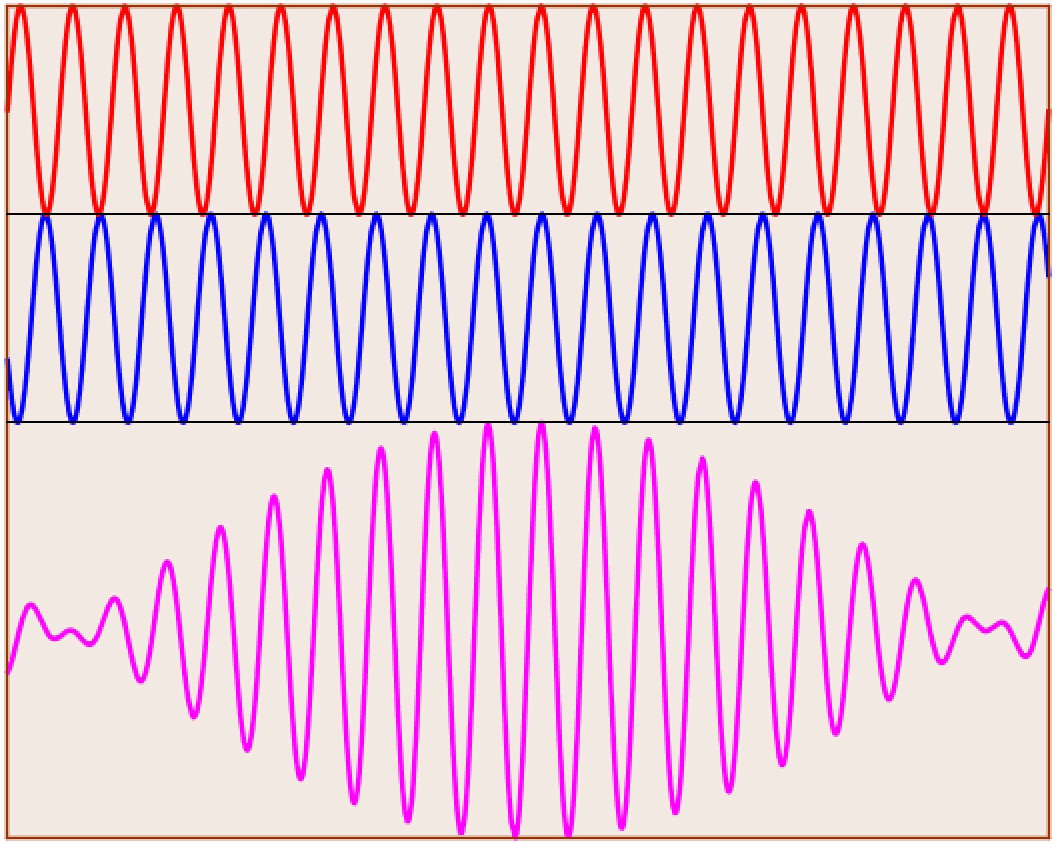
振幅时大时小的现象叫做“拍”。合振幅每变化一个周期称为一拍，单位时间内拍出现的次数(合振幅变化的频率)叫做拍频。

$$\boxed{\nu_{拍}=\frac{\omega_{拍}}{2\pi}=\left|\frac{\omega_2}{2\pi}-\frac{\omega_1}{2\pi}\right|=|\nu_2-\nu_1|}$$

拍频等于两个分振动频率之差

$$T_{拍}=\left|\frac{1}{\nu_2-\nu_1}\right|$$

同方向不同频率简谐振动的合成



拍频演示视频